УДК 517.9, 519.6

Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Аннотация. Предложен метод коллокации как альтернатива методу Галеркина, для решения псевдодифференциального уравнения электрического поля.

Ключевые слова: прямое и обратное преобразование Фурье, псевдодифференциальный оператор, псевдодифференциальное уравнение, метод коллокаций.

Abstract. Collocation method (alternative to Galerkin method) for solving pseudodifferential equation of electric field is suggested.

Keywords: direct and inverse Fourier transform, pseudodifferential operator, pseudodifferential equation, collocation method.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу дифракции. Пусть в свободном пространстве R^3 расположено объемное тело (область) Q с границей ∂Q класса C^∞, характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и 3×3-матрицей-функцией (тензором) диэлектрической проницаемости $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$. Компонентами тензора $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$ являются $\varepsilon_{ij}(x)$ – бесконечно гладкие функции в $\bar{Q}$, т.е. $\varepsilon_{ij}(x)\in C^\infty(\bar{Q})$, причем $\varepsilon_{ij}(x)=\varepsilon'_{ij}(x)/\varepsilon_0$, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость свободного пространства.

Из условия конечности энергии необходимо [1], чтобы $\mathbf{E}\in \mathbf{L}_2(Q)= = L_2(Q)\times L_2(Q)\times L_2(Q)$.

Требуется определить электромагнитное поле $\mathbf{E},\mathbf{H}\in \mathbf{L}_2(Q)$, возбуждаемое сторонним полем $\mathbf{E}^0,\mathbf{H}^0$ с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$.

Будем искать электромагнитное поле $\mathbf{E},\mathbf{H}$, удовлетворяющее уравнениям Максвелла, условиям непрерывности касательных компонент поля при переходе через границу тела и условиям излучения на бесконечности [1].

Задача отыскания $\mathbf{E},\mathbf{H}$ сводится к решению интегродифференциального уравнения [1]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(x)\mathbf{J}(x)=\mathbf{E}^0(x)+k_0^2\int\limits_Q \hat{\mathbf{G}}_E(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy+$$

$$+\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_Q \hat{\mathbf{G}}_E(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy,\ \ x\in Q, \tag{1}$$

где $\mathbf{J}(y)=\left(J_1(y),J_2(y),J_3(y)\right)^{\mathrm{T}}$.

Считаем, что $\hat{\boldsymbol{\theta}}(x):=\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(y)-\mathbf{I}\right)^{-1}$ существует при всех $x\in\bar{Q}$ и $\mathbf{J}(y):= :=\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(y)-\mathbf{I}\right)\mathbf{E}(y)$, тогда $\mathbf{E}(y)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)\mathbf{J}(y)$; $\mathbf{E}(y)=\left(E_1(y),E_2(y),E_3(y)\right)^{\mathrm{T}}$ –

(комплекснозначный) вектор электрического поля и $y=(y_1,y_2,y_3)$ – точка в пространстве R^3; $\mathbf{I}$ – единичная 3×3-матрица; $\widehat{\mathbf{G}}_E(x,y)=\begin{pmatrix} G_E^1 & 0 & 0 \\ 0 & G_E^2 & 0 \\ 0 & 0 & G_E^3 \end{pmatrix}$ – тензорная функция Грина, где $G_E^m(x,y)=\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|}+g^m(x,y)$, $x,y\in\bar{Q}$, $g^m\in C^\infty(\bar{Q}\times\bar{Q})$ – гладкая функция, $(m=1,2,3)$; k_0 – волновое число свободного пространства.

Уравнение (1) как псевдодифференциальное запишется в виде [2][1]

$$A\mathbf{J}=\mathbf{E}^0, \tag{2}$$

где

$$A\mathbf{J}=\frac{1}{(2\pi)^3}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x)-\mathbf{dt}(\xi)\right)\mathbf{J}(y)\,dyd\xi, \tag{3}$$

и $\mathbf{dt}(\xi)=-t(\xi)\begin{pmatrix} \xi_1^2-k_0^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_2^2-k_0^2 & \xi_2\xi_3 \\ \xi_1\xi_3 & \xi_2\xi_3 & \xi_3^2-k_0^2 \end{pmatrix}$, $t(\xi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{p_n(1-ik_0)}{|\xi|^{2n}}$, $p_1=1$.

В работе [2] относительно оператора A доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Если выполняются условия:*

1) *матрица* $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(x):=\left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(y)-\mathbf{I}\right)^{-1}$ *существует при всех* $x\in\bar{Q}$;

2) $\Delta(x)=\sum\limits_{i,j=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\alpha_j\varepsilon_{ij}(x)\neq 0$, $x\in\bar{Q}$, *и* $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+{}$ $+\cos^2\alpha_3=1$, *то оператор* $A:H^s_{\text{comp}}(Q)\to H^s_{\text{loc}}(Q)$, *определенный по формуле* (3), *является эллиптическим псевдодифференциальным оператором* (*ПДО*).

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда, если дополнительно выполнено одно из двух условий:

1) $\operatorname{Re}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)v\cdot\bar{v}\geq(C_2+1)|v|^2$, *при* $x\in\bar{Q}$ *и* $C_2>0$;

2) $\operatorname{Im}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)v\cdot\bar{v}\geq C_3|v|^2$, *при* $x\in\bar{Q}$,

то оператор $A:\mathbf{L}_2(Q)\to\mathbf{L}_2(Q)$, *определенный формулой* (3), *является фредгольмовым с нулевым индексом.*

Нас будет интересовать часть главного символа, которая определяется выражением

[1] Далее во всех интегралах, где пределы интегрирования не указаны явно, считаем, что интегрирование ведется по всему пространству.

$$\mathbf{a}(\xi)=\frac{1}{|\xi|^2}\begin{pmatrix}\xi_1^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3\\ \xi_1\xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2\xi_3\\ \xi_1\xi_3 & \xi_2\xi_3 & \xi_3^2\end{pmatrix}. \qquad (4)$$

2. Метод коллокации

Сначала кратко опишем общую схему метода коллокации, а затем применим ее к уравнению (1) (или (2)).

Для уравнения $A\varphi=f$ $(\varphi, f\in X)$ в гильбертовом пространстве X рассмотрим метод коллокации, который формулируется следующим образом. Приближенное решение $\varphi_n\in X_n$ определяется из уравнения $P_nA\varphi_n=P_nf$. Здесь $\varphi_n\in X_n$ (X_n есть n-мерное подпространство пространства X), $P_n:X\to X_n$ – оператор проектирования на конечномерное подпространство, который определяется ниже.

Разобьем область Q на элементарные подобласти Q_i с кусочно-гладкими границами ∂Q_i так, чтобы выполнялись условия $Q_i\cap Q_j=\varnothing$ при $i\neq j$ и $\overline{Q}=\bigcup\limits_i\overline{Q_i}$. Выберем в каждой подобласти Q_i точку (узел) коллокации x^i. Рассмотрим базисные функции $v_i=\begin{cases}1, x\in Q_i\\ 0, x\notin Q_i\end{cases}$. Пусть подпространства X_n являются линейными оболочками базисных функций: $X_n=\operatorname{span}\{v_l,\ldots,v_n\}$. Потребуем, чтобы для выбранных базисных функций выполнялось *условие аппроксимации*:

$$\forall x\in X \lim_{n\to\infty}\inf_{\overline{x}\in X_n}\|x-\overline{x}\|=0.$$

Проектор $P_n:X\to X_n$ определим так: $(P_n\varphi)(x)=\varphi\left(x^i\right),\ x\in Q_i$. Заметим, что при таком определении проектора не определены значения функций $(P_n\varphi)(x)$ при $x\in\partial Q_i$, но это не будет важно, так как в нашем случае $X=\mathbf{L}_2$.

Уравнение $P_nA\varphi_n=P_nf$ эквивалентно следующему:

$$(A\varphi_n)\left(x^j\right)=f\left(x^j\right),\ j=1,\ldots,n.$$

Представим приближенное решение в виде линейной комбинации базисных функций: $\varphi_n=\sum\limits_{k=1}^{n}c_kv_k$. Подставив это представление в схему метода коллокации, получим систему линейных алгебраических уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов c_k:

$$\sum_{k=1}^{n}c_k\left(Av_k\right)\left(x^j\right)=f\left(x^j\right),\ j=1,\ldots,n.$$

Основная трудность применения метода коллокации в данной работе связана с тем, что в качестве пространства X рассматривается пространство $\mathbf{L}_2 = L_2 \times L_2 \times L_2$, в котором значения функции в точке, вообще говоря, не определены. Таким образом, оператор проектирования $P_n : X \to X_n$ определен не на всем пространстве X и, вообще говоря, не ограничен. Это приводит к тому, что нельзя применить стандартные утверждения о сходимости проекционных методов. Однако в нашем случае правая часть f является гладкой функцией, и функция $A\varphi_n$ тоже будет определена в точках коллокации (что будет показано ниже). Поэтому дадим следующее

Определение 2.1. Метод коллокации будем называть *сходящимся* для оператора A и $f \in \operatorname{Im} A$, если существует число N такое, что приближенные уравнения $(A\varphi_n)\left(x^j\right) = f\left(x^j\right)$, $j = 1, \ldots, n$, имеют единственное решение $\varphi_n \in X_n$ для всех $n \geq N$, и если эти решения сходятся $\varphi_n \to \varphi$ при $n \to \infty$ к единственному решению φ уравнения $A\varphi = f$.

Рассмотрим вопрос о построении схемы для метода коллокации для уравнения (1).

Представим уравнение (1) в виде системы трех скалярных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_{li} J^i(x) - k_0^2 \int_Q G_E^l(x,y) J^l(y)\, dy -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_l} \operatorname{div}_x \int_Q \widehat{\mathbf{G}}_E(x,y) \mathbf{J}(y)\, dy = E^{0l}(x), \ l = 1,2,3.$$

Определим компоненты приближенного решения $\mathbf{J}_n = \left(J_n^1, J_n^2, J_n^3\right)$ следующим образом:

$$J_n^1 = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x),\ J_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k f_k(x),\ J_n^3 = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x),$$

где f_k – базисные функции-«ступеньки».

Ниже проводится построение функций f_k. Будем считать, что Q – параллелепипед: $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2,\ b_1 < x_2 < b_2,\ c_1 < x_3 < c_2\}$.

Разобьем Q элементарными параллелепипедами $Q_j = \Pi_{klm}$:

$$\Pi_{klm} = \left\{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1},\ x_{2,l} < x_l < x_{2,l+1},\ x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\right\};$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n}(k-1),\ x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{n}(l-1),\ x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{n}(m-1),$$

где $k, l, m = 1, \ldots, n$.

Получим формулы для f_{klm}:

$$f_{klm} = \begin{cases} 1, & x \in \Pi_{klm}, \\ 0, & x \notin \Pi_{klm}. \end{cases}$$

Построенное множество базисных функций удовлетворяет необходимому условию аппроксимации в $\mathbf{L}_2 = L_2 \times L_2 \times L_2$.

Расширенную матрицу для нахождения неизвестных коэффициентов a_k, b_k, c_k удобно представить в блочной форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{array}\right),$$

где элементы столбцов B_k и матриц A_{kl} определяются из соотношений

$$B_k^i = E_0^k\left(x_i\right);$$

$$A_{kl}^{ij} = \delta_{ij}\xi_{kl} - \delta_{kl}k_0^2 \int\limits_Q G_E^k\left(x^j, y\right) f_i\left(y\right) dy - \frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G_E^l\left(x^j, y\right) f_i\left(y\right) dy, \quad (5)$$

а координаты точки коллокации имеют вид

$$x^i = \left(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\right),\ x_{i1} = \left(i_1 + 1/2\right)h_1,\ x_{i2} = \left(i_2 + 1/2\right)h_2,\ x_{i3} = \left(i_3 + 1/2\right)h_3,$$

$$h_1 = \frac{a_2 - a_1}{n},\ h_2 = \frac{b_2 - b_1}{n},\ h_3 = \frac{c_2 - c_1}{n},\ k, l = 1,2,3;\ i, j = 1,\ldots,N;\ N = n^3.$$

Таким образом, представлены расчетные формулы для матричных коэффициентов метода коллокации для решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения.

Докажем прежде всего, что значения матричных коэффициентов действительно могут быть вычислены в точках коллокации $x^i = \left(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\right)$. Для этого достаточно рассмотреть интегралы вида $\frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G_E^l\left(x^j, y\right) f_i\left(y\right) dy$, так как остальные интегралы, входящие в (5), очевидно могут быть вычислены в точках коллокации, поскольку они определяются как значения непрерывных функций в точке. Более того, вышеуказанный интеграл можно заменить интегралом

$$I_j^{kl} \equiv I^{kl}\left(x^j\right) := -\frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_{Q_j} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{\left|x^j - y\right|} dy, \quad (6)$$

оставив только часть, которая может содержать особенность. Используя метод псевдодифференциальных операторов, можно представить интеграл

$$I^{kl}\left(x\right) := -\frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_{Q_j} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{\left|x - y\right|} dy \quad (7)$$

в виде действия ПДО на базисную функцию и вычислить его аналитически.

Учитывая формулу (4), можно показать, что интеграл (7) будет иметь вид

$$I^{kl}(y)=\frac{1}{\pi^3}\iiint e^{i(y_1\xi_1+y_2\xi_2+y_3\xi_3)}\sin\frac{\xi_1 h_1}{2}\sin\frac{\xi_2 h_2}{2}\sin\frac{\xi_3 h_3}{2}\frac{\xi_k\xi_l d\xi}{\xi_1\xi_2\xi_3|\xi|^2},$$

где $\frac{1}{\xi_1\xi_2\xi_3}\sin\frac{\xi_1 h_1}{2}\sin\frac{\xi_2 h_2}{2}\sin\frac{\xi_3 h_3}{2}=\frac{1}{8}\int\limits_{-h_3/2}^{h_3/2}\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2}\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}e^{-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3)}dx$ есть преобразование Фурье элементарного параллелепипеда Π_{klm}, центр которого расположен в начале координат, а ребра параллельны координатным осям.

Интегралы I^{kl} в точке коллокации $y_1=y_2=y_3=0$ вычислены в п. 3. Приведем здесь значения этих интегралов:

$$I^{11}=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{h_2h_3}{h_1\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{h_2h_3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sqrt{h_1^2+h_3^2}};$$

$$I^{22}=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{h_1h_3}{h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{h_1h_3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sqrt{h_2^2+h_3^2}};$$

$$I^{33}=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{h_1h_2}{h_3\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_3^2}\sqrt{h_2^2+h_3^2}};$$

$$I^{12}=I^{21}=I^{23}=I^{32}=I^{13}=I^{31}=0,$$

что совпадает со значениями из [1, с. 121]. Отметим, что $I^{ll}\left(x^j\right)>0,\ l=1,2,3.$

Таким образом, интегралы (6) (значения интегралов (7) в точках коллокации) ограничены константой, не зависящей от шагов h_1, h_2, h_3. Остальные части в формуле (5) представляются непрерывными функциями и также могут быть ограничены константой, не зависящей от шагов h_1, h_2, h_3. Следовательно, мы получаем следующее

Утверждение 2.1. *Существует константа M такая, что для коэффициентов* (5) *верно неравенство* $\left|A_{kl}^{ij}\right|\le M$, *причем M не зависит от h_1, h_2, h_3 и i, j, k, l.*

Наша ближайшая цель – доказать разрешимость конечномерных уравнений. Для этого докажем вспомогательное утверждение.

Введем n-мерные пространства R_1^n, R_2^n и R_∞^n с нормами, соответственно,

$$\|b\|_1\equiv\sum_{i=1}^n|b_i|,\ \|b\|_2\equiv\sqrt{\sum_{i=1}^n|b_i|^2},\ \|b\|_\infty\equiv\max_{1\le i\le n}|b_i|,$$

где $b=(b_1,\dots,b_n)^T$.

Будем рассматривать конечномерные (матричные) операторы $A_n:R_1^n\to R_\infty^n$. Соответствующая операторная (матричная) норма имеет вид

$$\|A_n\|_{1\to\infty} = \max_{1\le i,j\le n}\left|a_{ij}^{(n)}\right|,$$

где $a_{ij}^{(n)}$ – коэффициенты матрицы $A_n = \left\{a_{ij}^{(n)}\right\}_{i,j=1}^{n}$. Действительно, если $A_n b = c$, $b\in R_1^n$, $c\in R_\infty^n$, то

$$\|c\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left|(A_n b)_i\right| = \max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(n)} b_j\right| \le \left(\max_{1\le i\le n}\max_{1\le j\le n}\left|a_{ij}^{(n)}\right|\right)\|b\|_1 .$$

Перебирая поочередно векторы b, имеющие только одну ненулевую компоненту, легко найти вектор, при котором указанное выше неравенство перейдет в равенство, что и доказывает формулу для нормы.

Рассмотрим матричное уравнение

$$(A_n + B_n)b = c, \qquad (8)$$

где $A_n : R_1^n \to R_\infty^n$, $B_n : R_1^n \to R_\infty^n$, $b\in R_1^n$, $c\in R_\infty^n$.

Лемма 2.1. *Если существует обратная матрица* A_n^{-1} *и для всех* n *верна оценка* $\|B_n\|_{1\to\infty} < \dfrac{1}{\left\|A_n^{-1}\right\|_{\infty\to 1}}$, *то уравнение* (8) *имеет единственное решение при всех* n.

Доказательство. При выполнении условий леммы уравнение (8) можно переписать в виде $A_n\left(I + A_n^{-1}B_n\right)b = c$. Так как $\left\|A_n^{-1}B_n\right\|_{1\to 1} \le$ $\le \left\|A_n^{-1}\right\|_{\infty\to 1}\|B_n\|_{1\to\infty} < 1$, то решение уравнения (8) существует и единственно, и имеет вид $b = \left(I + A_n^{-1}B_n\right)^{-1} A_n^{-1}c$.

Если $A_n : R_\infty^n \to R_1^n$ и все $a_{ij}^{(n)} \ge 0$ (или все $a_{ij}^{(n)} \le 0$) или матрица является диагональной ($a_{ij}^{(n)} = \delta_{ij}a_{ii}^{(n)}$), то для соответствующей операторной (матричной) нормы верна формула

$$\|A_n\|_{\infty\to 1} = \sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}^{(n)}\right|, \qquad (9)$$

где $a_{ij}^{(n)}$ – коэффициенты матрицы $A_n = \left\{a_{ij}^{(n)}\right\}_{i,j=1}^{n}$.

Действительно, если $A_n b = c$, $b\in R_\infty^n$, $c\in R_1^n$, то

$$\|c\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|(A_n b)_i\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(n)} b_j\right| \le \left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}^{(n)}\right|\right)\|b\|_\infty .$$

Если все компоненты вектора b равны между собой, то указанное выше неравенство перейдет в равенство с учетом условия $a_{ij}^{(n)} \ge 0$ или $a_{ij}^{(n)} \le 0$. Если матрица является диагональной, то можно выбрать вектор b с компонентами $b_i = \operatorname{sign}\left(a_{ii}^{(n)}\right)$. Тогда снова неравенство перейдет в равенство, что и доказывает формулу для нормы.

Рассмотрим конечномерные уравнения метода коллокации:

$$A_N u = b, \tag{10}$$

где

$$A_N = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \ u = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.1. *Пусть тензор* $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) \in C(\overline{Q})$ *диагональный, вещественнозначный и* $\varepsilon_{ll}(x) > 1$, $x \in \overline{Q}$ $(l = 1,2,3)$. *Тогда существует* N_0 *такое, что при* $N \ge N_0$ *решения уравнений* (10) *существуют и единственны.*

Доказательство. Из условий теоремы сразу следует, что матрица $\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) - \mathbf{I}\right) \in C(\overline{Q})$ обратима в $\overline{Q}$, $\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) - \mathbf{I}\right)^{-1} \in C(\overline{Q})$.

Представим матричные коэффициенты (5) в виде

$$A_{kl}^{ij} = C_{kl}^{ij} + D_{kl}^{ij}, \text{ где } C_{kl}^{ij} = \delta_{ij}\left(\xi_{kl} + I^{kl}\left(x^j\right)\right),$$

$$D_{kl}^{ij} = -\delta_{kl} k_0^2 \int\limits_Q G_E^k\left(x^j, y\right) f_i(y)\, dy - \frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G_E^l\left(x^j, y\right) f_i(y)\, dy - \delta_{ij} I^{kl}\left(x^j\right).$$

Запишем уравнение (10) в виде

$$\left(C_N + D_N\right) u = b$$

с матрицами C_N и D_N, имеющими коэффициенты C_{kl}^{ij} и D_{kl}^{ij} соответственно. Из утверждения 2.1 следует, что для коэффициентов матрицы D_N выполняются неравенства $\left|D_{kl}^{ij}\right| \le M$. Матрица C_N является диагональной и, очевидно, обратима (здесь мы учли, что $I^{ll}\left(x^j\right) \ge 0,\ l = 1,2,3.$). Неотрицательны будут и все элементы диагональной матрицы C_N^{-1}. Тогда для нормы обратной матрицы C_N^{-1} верна формула (9). Ясно, что $\left\|C_N^{-1}\right\|_{\infty \to 1} = O^*(N)$ при $N \to \infty$ (здесь символ $F = O^*(N)$ означает, что существуют не зависящие от N константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что верно неравенство $C_1 N \le |F| \le C_2 N$). Поскольку интегралы, входящие в D_{kl}^{ij}, берутся либо от ограниченных функций, либо от функций, имеющих особенность $O\left(r^{-1}\right)$, для нормы будет верна оценка $\left\|D_N\right\|_{1\to\infty} = O\left(N^{-2}\right)$ при $N \to \infty$. Действительно, интеграл $\int\limits_{Q_j} \frac{1}{\left|x^j - y\right|} dy$ легко оценить, заменив интегрирование по параллелепипеду Q_j интегралом по описанному около параллелепипеда Q_j шару (от той же функции), и вычислить последний интеграл явно в сферических координатах. Таким образом, применима лемма 2.1.

Для доказательства теоремы остается заметить, что левая часть неравенства в оценке в лемме 2.1 стремится к 0 быстрее, чем правая часть, поэтому начиная с некоторого N_0 эта оценка будет выполняться и, следовательно, уравнения (10) будут однозначно разрешимы.

Доказанная теорема 2.1 устанавливает разрешимость конечномерных уравнений в методе коллокации при некоторых ограничениях на тензор $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$. Заметим, что эти ограничения выделяют широкий класс диэлектриков, используемых на практике.

3. Вычисление интегралов

Рассмотрим интеграл

$$I^{ij} = \frac{1}{\pi^3} \iiint e^{i\left(y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3\right)} \sin\frac{\xi_1 h_1}{2} \sin\frac{\xi_2 h_2}{2} \sin\frac{\xi_3 h_3}{2} \frac{\xi_i \xi_j d\xi}{\xi_1\xi_2\xi_3 |\xi|^2}. \qquad (11)$$

Мы считаем, что $I^{ij} \equiv I^{ij}\left(y_1, y_2, y_3\right)$. Достаточно вычислить интегралы только двух типов I^{kl} при $k \neq l$ и I^{kk} для любых конкретных $k, l = 1,2,3$, значения остальных интегралов можно получить из соображений симметрии. Далее мы будем работать с интегралами $I^{ij} \equiv I^{ij}\left(0,0,0\right)$, т.е. со значениями рассматриваемого интеграла в точке коллокации. Легко видеть, что замена $h_i := h_i/2$, $i = 1,2,3$ не изменяет $I^{ij}\left(0,0,0\right)$, будем этим пользоваться для сокращения записи.

Рассмотрим I^{12}, поскольку подынтегральная функция нечетна по ξ_1 (и по ξ_2), то

$$I^{12} = \frac{1}{\pi^3} \iiint \sin\left(\xi_1 h_1\right) \sin\left(\xi_2 h_2\right) \sin\left(\xi_3 h_3\right) \frac{d\xi}{\xi_3 |\xi|^2} = 0.$$

Отсюда получаем, что $I^{12} = I^{21} = I^{23} = I^{32} = I^{13} = I^{31} = 0$.

Заметим, что интеграл $I^{12}\left(y_1, y_2, y_3\right)$ можно вычислить точно даже в произвольной точке y.

Еще один интеграл типа I^{ij}, который необходимо вычислить, это

$$I^{22} = \frac{1}{\pi^3} \iiint \sin(\xi_1 h_1) \sin(\xi_2 h_2) \sin(\xi_3 h_3) \frac{\xi_2 d\xi}{\xi_1 \xi_3 |\xi|^2}. \qquad (12)$$

Сначала вычислим через вычеты интеграл по ξ_2, получим $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(\xi_2 h_2) \frac{\xi_2 d\xi_2}{|\xi|^2} = \pi e^{-h_2 \xi'}$, где $\xi' = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2}$.

Теперь в оставшемся двойном интеграле используем формулу Эйлера $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ и переходим к полярным координатам: $\xi_1 = \rho\cos\varphi$, $\xi_2 = \rho\sin\varphi$. Здесь, учитывая формулу

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x} - e^{-\nu x}}{x} dx = \ln\frac{\nu}{\mu}, \qquad (13)$$

где $\mathrm{Re}\,\mu > 0$ и $\mathrm{Re}\,\nu > 0$ [3, с. 348] и проводя простые преобразования, получаем

$$I^{22} = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{\pi/2} \ln \frac{h_2^2\left(1 + \mathrm{tg}^2\varphi\right) + \left(h_1 + h_3\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)^2}{h_2^2\left(1 + \mathrm{tg}^2\varphi\right) + \left(h_1 - h_3\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)^2} \frac{d\varphi}{\mathrm{tg}\,\varphi\cos^2\varphi} -$$

$$-\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{\pi/2} \ln \frac{h_2^2\left(1 + \mathrm{ctg}^2\varphi\right) + \left(h_1 - h_3\,\mathrm{ctg}\,\varphi\right)^2}{h_2^2\left(1 + \mathrm{ctg}^2\varphi\right) + \left(h_1 + h_3\,\mathrm{ctg}\,\varphi\right)^2} \frac{d\varphi}{\mathrm{ctg}\,\varphi\sin^2\varphi}.$$

Теперь в первом интеграле делаем замену $t = \mathrm{tg}\,\varphi$, а во втором – $t = \mathrm{ctg}\,\varphi$, после некоторых преобразований получаем, что

$$I^{22} = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{\infty} \ln \frac{h_2^2\left(1 + t^2\right) + \left(h_1 + h_3 t\right)^2}{h_2^2\left(1 + t^2\right) + \left(h_1 - h_3 t\right)^2} \frac{dt}{t}.$$

В последнем интеграле, раскладывая числитель и знаменатель под знаком логарифма на множители, интегрируя по частям, используя формулу $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{(x+\beta)(x+\gamma)} = \frac{(\ln\beta)^2 - (\ln\gamma)^2}{2(\beta-\gamma)}$ [3, с. 547] и помня о том, что $\ln(-1) = \pi i + 2\pi i k$, $k \in R$, получаем

$$I^{22} = \frac{1}{\pi^2}\left(2\pi i(1+k+l)\ln\sqrt{\frac{h_1^2 + h_2^2}{h_2^2 + h_3^2}} + 2\pi(l-k)\,\mathrm{arctg}\frac{h_1 h_3}{h_2\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}\right).$$

Легко видеть из (12), что $\operatorname{Im} I^{22} = 0$, отсюда получаем, что $1 + k + l = 0$. Можно показать, что $I^{22}\Big|_{h_1=h_2=h_3=1} = \frac{1}{3}$ (также см. [1]). Учитывая последнее, получаем, что $l - k = 1$. Отсюда находим, что $k = -1$, $l = 0$. Окончательно имеем

$$I^{22} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{h_1 h_3}{h_2 \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}.$$

Замечание. Интеграл I^{22} не отражен в известных справочниках [3, 4].

Теперь можно выписать значения остальных интегралов в точках коллокации, просто циклически переставляя индексы (см. п. 2).

В качестве модельного примера можно рассматривать куб со стороной $h = 1$, т.е. $h_1 = h_2 = h_3 = 1$. Из предыдущих формул получаем

$$I^{11} = I^{22} = I^{33} = \frac{1}{3}.$$

Поясним кратко, как вычисляется интеграл

$$I = \frac{1}{\pi^3} \iiint \sin \xi_1 \sin \xi_2 \sin \xi_3 \frac{\xi_2 d\xi}{\xi_1 \xi_3 |\xi|^2} = \frac{1}{3},$$

который есть $I^{22}\Big|_{h_1=h_2=h_3=1}$. Схема такова: сначала берется через вычеты интеграл по ξ_3, затем вводятся полярные координаты и используется формула (13), затем полученный однократный интеграл от тригонометрических функций после некоторых преобразований сводится к интегралам

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 + p \sin x) \frac{dx}{\sin x} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}(\arccos p)^2;$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 + p \cos x) \frac{dx}{\cos x} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}(\arccos p)^2, \ p^2 \le 1$$

(последние интегралы при $p^2 < 1$ приведены в [3]).

Список литературы

1. **Самохин, А. Б.** Итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и связь, 1998.
2. **Валовик, Д. В.** Метод псевдодифференциальных операторов для исследования объемного сингулярного интегрального уравнения электрического поля / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4. – С. 70–84.
3. **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Физматгиз, 1962.
4. **Прудников, А. П.** Интегралы и ряды. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука, 1981. – Т. 1.

Валовик Дмитрий Викторович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

E-mail: dvalovik@mail.ru

Valovik Dmitry Viktorovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University

Смирнов Юрий Геннадьевич
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yury Gennadyevich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University

УДК 517.9, 519.6

Валовик, Д. В.

Метод коллокации для решения уравнения электрического поля / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4 (16). – С. 89–100.